Gyökös egyenletek

I.Feladat: Oldja meg az egyenleteket!

1.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből

Rendezzük át az egyenletet:

Ha a gyökjel alatti mennyiség teljesíti a nemnegatív feltételt: akkor a definíció értelmében annak négyzetgyöke is kizárólag nemnegatív előjelű lehet, így ennek az egyenletnek nincs megoldása.

Megjegyzés: abban az esetben, ha ezt nem vesszük észre és továbbhaladunk, akkor

Amely értéket ellenőrizve, ellentmondás adódik.

2.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből

Négyzetre emelés után:

Amely megoldás eleget tesz az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak és az ellenőrzés is megerősíti a jó megoldást.

3.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből

Rendezzük át az egyenletet:

Négyzetre emelés után:

Amely megoldás eleget tesz az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak és az ellenőrzés is megerősíti a jó megoldást.

4.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből így

Végezzük el a négyzetre emelést:

A kapott megoldás eleget tesz az alaphalma feltétel-vizsgálatnak és az ellenőrzésnek is.

5.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből így

Végezzük el a négyzetre emelést:

A kapott megoldás eleget tesz az alaphalma feltétel-vizsgálatnak és az ellenőrzésnek is.

6.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek megoldásához határozzuk meg mindkét szorzótényező zérushelyét: amelyből illetve amelyből

Táblázat:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

A megoldáshalmaz:

Végezzük el a négyzetre emelést:

A bal oldali kéttényezős szorzat akkor lehet nulla értékű, ha valamely tényező nulla értékű, így az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnál meghatározott zérushelyek az egyenlet lehetséges megoldásai, amelyeket az ellenőrzés megerősít.

7.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek megoldásához határozzuk meg mindkét szorzótényező zérushelyét: amelyből illetve amelyből

Táblázat:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

A megoldáshalmaz:

Végezzük el a négyzetre emelést:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

Mindkét kapott megoldás eleget tesz az alaphalmaz feltételnek és az ellenőrzésnek is.

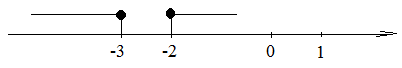
II.Feladat: Oldja meg az egyenleteket!

1.)

Rendezzük át az egyenletet:

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A kapott feltételeket egy közös számegyenesen ábrázolva:



Azt tapasztaljuk, hogy azoknak nincs közös része, mert nem létezik olyan valós szám, amely legfeljebb értékű ugyanakkor legalább értékű.

2.)

Rendezzük át az egyenletet:

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Az elkövetkező négyzetre emelés művelet elvégzésekor azonban figyelnünk arra, hogy a jobb oldalon két tagú összeg van, amelyet az erre vonatkozó nevezetes azonosság felhasználásával emelünk négyzetre:

Együtthatók:

Tehát előfordulhat, hogy olyan másodfokú egyenletre vezet a megoldandó négyzetgyökös egyenlet, amelynek nincs valós megoldása. Vagyis a másodfokú egyenlet megoldásainak számától függően előfordulhat az, hogy a megoldandó gyökös egyenletnek két egybeeső megoldása van, amelyek nem tesznek eleget a feltétel-vizsgálatnak, előfordulhat az, hogy az egybeeső gyökök jó megoldások, előforulhat az, hogy a kapott másodfokú egyenlet megoldásakor adódó két különböző megoldása esetén, azok nem tesznek eleget az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak; előfordulhat az, hogy a lehetséges két különböző gyök közül csak az egyik tesz eleget a feltételeknek és előfordulhat, hogy mindkettő megfelel a feltételeknek.

3.)

Rendezzük át az egyenletet:

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Az elkövetkező négyzetre emelés művelet elvégzésekor azonban figyelnünk arra, hogy a jobb oldalon két tagú különbség van, amelyet az erre vonatkozó nevezetes azonosság felhasználásával emelünk négyzetre:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A két lehetséges megoldás közül kizárólag az utóbbi tesz eleget az alaphalmaz feltételeknek, amelyet az ellenőrzés megerősít.

4.)

Rendezzük át az egyenletet:

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Az elkövetkező négyzetre emelés művelet elvégzésekor azonban figyelnünk arra, hogy a jobb oldalon két tagú összeg van, amelyet az erre vonatkozó nevezetes azonosság felhasználásával emelünk négyzetre:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

Megjegyzés: a feladat egy másik lehetséges megoldása, ha felhasználjuk, hogy a gyökjel alatti és a gyöktől független mennyiség megegyezik. Ekkor az áttekinthetőség miatt bevezetünk egy segédváltozót, legyen például ebből pedig négyzetre emeléssel következik: ezeket visszahelyettesítve az egyenlet átírható:

A jobb oldali kéttényezős szorzat kizárólag akkor lehet nulla értékű, ha valamelyik tényező nulla értékű, tehát

Ebből négyzetre emeléssel és kivonással adódik az megoldás. Illetve

Ebből négyzetre emeléssel és kivonással adódik az megoldás.

5.)

Rendezzük át az egyenletet:

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része: az egyetlen valós szám, tehát ha ennek az ennek az egyenletnek van megoldása, az kizárólag lehet, amelyet az ellenőrzés megerősít.

6.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből így tehát illetve

amelyből így

A feltételek közös része:

Szorozzunk a nevezőben lévő konstans-értékkel:

Az elkövetkező négyzetre emelés művelet elvégzésekor azonban figyelnünk arra, hogy a bal oldalon két tagú különbség van, amelyet az erre vonatkozó nevezetes azonosság felhasználásával emelünk négyzetre:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A kapott megoldások közül az első nem tesz eleget az alaphalmaz feltételnek, a második eleget tesz és az llenőrzésnek is.

7.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből ennek gyökei: tehát a (negatív előjelű főegyüttható miatt) lefelé nyíló parabola a gyökök között teljesíti a kér relációt: illetve

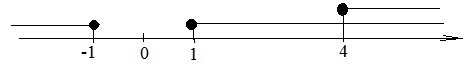
amelyből amely feltételeket közös számegyenesen ábrázolva:



Azt tapasztaljuk, hogy azoknak nincs közös része, mert nem létezik olyan valós szám, amely legfeljebb közötti ugyanakkor legalább értékű.

8.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből ennek gyökei: tehát a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb illetve a nagyobbik gyöktől nagyobb tartományokon teljesíti a kér relációt: illetve amelyből amely feltételeket közös számegyenesen ábrázolva:



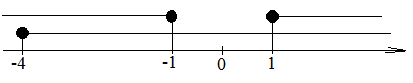
A feltételek közös része:

Az elkövetkező négyzetre emelés művelet elvégzésekor azonban figyelnünk arra, hogy a jobb oldalon két tagú különbség van, amelyet az erre vonatkozó nevezetes azonosság felhasználásával emelünk négyzetre:

A kapott megoldás nem tesz eleget az feltétel-vizsgálatnak.

9.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből ennek gyökei: tehát a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb illetve a nagyobbik gyöktől nagyobb tartományokon teljesíti a kér relációt: illetve amelyből amely feltételeket közös számegyenesen ábrázolva:



A feltételek közös része:

A kapott megoldást az ellenőrzés alátámasztja, hogy ténylegesen jó megoldás.

Megjegyzés: természetesen az is előfordulhat, hogy a lehetséges megoldások közül egyik sem, illetve az is, hogy mindkettő eleget tesz az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak.

10.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből ennek gyökei: tehát a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb illetve a nagyobbik gyöktől nagyobb tartományokon teljesíti a kér relációt: illetve amelyből amely feltételek közös része

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

Az utóbbi megoldás nem tesz eleget az alaphalmaz feltételnek, az első megoldás helytálló, amelyet az ellenőrzés is megerősít.

11.)

Használjuk ki, hogy a megoldandó egyenletben szereplő gyökös mennyiségek egyneműek (mert a gyök alatt ugyanazon összegzés szerepel) ezért az egyenlet átrendezése után aódik:

Amely egyenletnek a négyzetgyök értékkészletére vonatkozó feltétel miatt nincs megoldása.

12.)

Használjuk ki, hogy a megoldandó egyenletben szereplő gyökös mennyiségek egyneműek (mert a gyök alatt ugyanazon összegzés szerepel) ezért az egyenlet átrendezése után aódik:

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből

Amely megoldás helytállóságát az ellenőrzés megerősíti.

13.)

Használjuk ki, hogy a megoldandó egyenletben szereplő gyökös mennyiségek egyneműek (mert a gyök alatt ugyanazon összegzés szerepel) ezért az egyenlet átrendezése után aódik:

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Az elkövetkező négyzetre emelés művelet elvégzésekor azonban figyelnünk arra, hogy a bal oldalon két tagú összeg van, amelyet az erre vonatkozó nevezetes azonosság felhasználásával emelünk négyzetre:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A kapott megoldások eleget tesznek az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak és az ellenőrzés is megerősíti mindkettőt.

14.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve a tört értelmezés szerint: amelyből így valamint amelyből így

Szorozzuk az egyenletet a nevezők legkisebb közös többszörösével (mivel tört=tört alakú egyenlet, ezért keresztbeszorzás történik)

Ebből négyzetre emeléssel és kivonással adódik

15.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből

Végezzük el a kijelölt négyzetre emelés műveletek a megfelelő nevezetes azonosságok alkalmazásával:

Mielőtt továbbhaladnánk érdemes az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot kiegészíteni a bal oldali változót tartalmazó összegzés vizsgálatával, mert előfordulhat, hogy ellentmondás adódik és szükségtelen a megoldás folytatása.

Mivel feltételből amely nem módosítja az eredetileg megállapított feltételt, így:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A kapott megoldások eleget tesznek az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak is és az ellenőrzésnek is.

16.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből leolvasva az együtthatókat helyettesítünk a megoldó-képletbe

Tehát ez egy teljes négyzet, így (a pozitív főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola az helyen érinti a vízszintes tengelyt és minden valós szám esetén teljesíti a kért relációt, illetve amelyből

Alakítsuk át az egyenletet úgy, hogy alkalmazzuk a definíció harmadik kiegészítését:

Az abszolútérték miatt esetvizsgálat szükséges

1.eset: ha az abszolútérték jelek közötti összegzés nemnegatív, tehát amelyből adódik, ez pedig összhangban van az alaphalmaz feltétellel, ekkor az abszolútérték jelet egyszerűen elhagyjuk, így a megoldandó egyenlet

Ez azonosság, vagyis az egyenlet megoldása, minden olyan valós szám, amely az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak eleget tesz, tehát:

2.eset: ha az abszolútérték jelek közötti összegzés negatív, tehát amelyből adódik, ez pedig ellentmond az alaphalmaz feltételnek, így szükségtelen a megoldás folytatása.

Megjegyzés: abban az esetben, ha mégis folytatnánk a megoldást, akkor az abszolútérték jelek közötti összegzésnek ellentettjét vesszük, így a megoldandó egyenlet

Ennek megoldása , amelyet már előzőleg megtaláltunk.

17.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből leolvasva az együtthatókat helyettesítünk a megoldó-képletbe

Tehát ez egy teljes négyzet, így (a pozitív főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola az helyen érinti a vízszintes tengelyt és minden valós szám esetén teljesíti a kért relációt, illetve amelyből

Alakítsuk át az egyenletet úgy, hogy alkalmazzuk a definíció harmadik kiegészítését:

Az abszolútérték miatt esetvizsgálat szükséges

1.eset: ha az abszolútérték jelek közötti összegzés nemnegatív, tehát amelyből adódik, ez pedig leszűkíti az alaphalmaz feltételt, ekkor az abszolútérték jelet egyszerűen elhagyjuk, így a megoldandó egyenlet

A kapott megoldás nem tesz eleget az utóbb kapott feltételnek.

2.eset: ha az abszolútérték jelek közötti összegzés negatív, tehát amelyből adódik, ezt összevetve az alaphalmaz feltétellel, így adódik

A kapott megoldás eleget tesz az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak, az ellenőrzés pedig megerősíti a megoldást.

18.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számtartományon teljesül, tehát

Illetve amelynek gyökei a (negatív előjelű főegyüttható miatt) lefelé nyíló parabola a gyökök közötti tartományon teljesíti a kért relációt, tehát . Azt tapasztaljuk, hogy a feltételeknek nincs közös része, ennek az egyenletnek nincs megoldása.

19.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számtartományon teljesül, tehát

Illetve amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számtartományon teljesül, tehát

A feltételek közös része az elsőként kapott megoldáshalmaz:

Az elkövetkező négyzetre emelés művelet elvégzésekor azonban figyelnünk arra, hogy a jobb oldalon két tagú különbség van, amelyet az erre vonatkozó nevezetes azonosság felhasználásával emelünk négyzetre:

Együtthatók:

Tehát az egyenletnek nincs valós megoldása.

20.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számtartományon teljesül, tehát

Illetve amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számtartományon teljesül, tehát

A feltételek közös része az utóbb kapott megoldáshalmaz:

Az elkövetkező négyzetre emelés művelet elvégzésekor azonban figyelnünk arra, hogy a jobb oldalon két tagú különbség van, amelyet az erre vonatkozó nevezetes azonosság felhasználásával emelünk négyzetre:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

Amelyek alapján, ha akkor amely megoldások eleget tesznek az alaphalmaz feltételnek (és az ellenőrzés is megerősíti helytállóságukat); valamint ha akkor amely megoldások nem tesznek eleget az alaphalmaz feltételnek.

III.Feladat: Oldja meg az egyenleteket!

1.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből tehát

A kapott feltételnek eleget tevő valós számok esetén az egyenlet bal oldala nemnegatív előjelű, amelynek ellentmond a jobb oldali negatív érték, így ennek az egyenletnek nincs valós megoldása.

2.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből tehát

Végezzünk négyzetre emelést:

Ezután ismét négyzetre emelés következik:

A kapott megoldás eleget tesz az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak és az ellenőrzésnek is.

3.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből tehát

Végezzünk négyzetre emelést:

Ezután ismét négyzetre emelés következik:

A kapott megoldás eleget tesz az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak és az ellenőrzésnek is.

4.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

Ezeket a feltételeket közös számegyenesen ábrázolva ellentmondás adódik, mert nincs olyan valós szám, amely legfeljebb értékű ugyanakkor legalább értékű.

5.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Azonban a megoldás folytatása esetén hivatkozhatunk a négyzetgyök értékkészletére, ugyanis ha a gyökök alatti mennyiségek nemnegatív előjelűek, akkor azok négyzetgyökei is nemnegatívak, így azok összege sem lehet negatív.

6.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Az egyenlet bal oldalán lévő négyzetgyökös mennyiségek együttes nemnegatív feltételének teljesülése esetén az egyenlőség kizárólag akkor teljesülhet, ha mindkét gyökös tag egyidejűleg nulla értékű, tehát:

amelyből így adódik valamint amelyből így

Az alaphalmaz feltételeknek csak az tesz eleget azonban az ellenőrzésnél erre is ellentmondás adódik.

7.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Az egyenlet bal oldalán lévő négyzetgyökös mennyiségek együttes nemnegatív feltételének teljesülése esetén az egyenlőség kizárólag akkor teljesülhet, ha mindkét gyökös tag egyidejűleg nulla értékű, tehát:

amelyből így adódik valamint amelyből így

Az alaphalmaz feltételeknek mindkét lehetséges megoldás eleget tesz, azonban az ellenőrzésnél mindkettőre ellentmondás adódik.

8.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

Ezeket a feltételeket közös számegyenesen ábrázolva az adódik, hogy egyetlen olyan valós szám létezik, amely az egyenletnek eleget tehet, az lehetséges megoldás ellenőrzésekor pedig azonosság adódik.

Megjegyzés: általában is elmondható, az olyan négyzetgyökös egyenletek megoldásánál, amelyben pontosan kettő négyzetgyökös mennyiség szerepel, csak akkor létezhet megoldás, ha az alaphalmaz feltételek közös lehetséges megoldást tesznek lehetővé.

9.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Azonban a megoldás folytatása esetén hivatkozhatunk a négyzetgyök értékkészletére, ugyanis ha a gyökök alatti mennyiségek nemnegatív előjelűek, akkor azok négyzetgyökei is és szorzatuk is nemnegatív, így nem teljesülhet egyenlőség.

10.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Emeljünk négyzetre:

A bal oldali kéttényezős szorzat akkor lehet nulla értékű, ha valamely tényező nulla értékű, így amelyből illetve amelyből

Az ellenőrzés mindkettő lehetséges megoldást megerősíti, hogy jó megoldások.

11.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Emeljünk négyzetre:

A bal oldali kéttényezős szorzat kizárólag akkor lehet nulla értékű, ha valamely tényező nulla értékű, így: amely nem tesz eleget az alaphalmaz feltételeknek, valamint amelyből

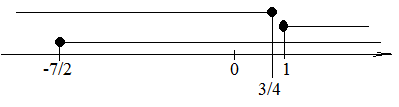
A kapott megoldást az ellenőrzés is megerősíti, hogy jó megoldás.

12.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből valamint

amelyből

A kapott feltételeket közös számegyenesen ábrázolva:



Azt tapasztaljuk, hogy a feltételeknek nincs közös része, így ennek az egyenletnek nincs megoldása.

13.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből valamint

amelyből

A feltételek közös része:

Végezzük el a négyzetre emelést:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A kapott megoldások eleget tesznek az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak is és az ellenőrzésnek is.

Megjegyzés: a feladat másik lehetséges felírása:

Ebben az esetben annyi változik, hogy a jobb oldali tört nevezőjében lévő változót tartalmazó összegzésre a gyök miatt nemnegatív előjelű feltétel-vizsgálatot a tört értelmezés miatt nem nulla feltétel-vizsgálatot kell tennünk, így elegendő csak a amelyből és ez lesz a feltételek közös része.

14.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Rendezzük át az egyenletet:

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

A feladat folytatása esetén hivatkozhatunk a négyzetgyök értékkészletére, nincs lehetséges megoldás.

15.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Rendezzük át az egyenletet:

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

A kapott megoldás eleget tesz az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak és az ellenőrzésnek is.

16.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Rendezzük át az egyenletet:

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

A megoldás folytatása esetén az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot ki kell egészíteni a bal oldali változót tartalmazó összegzésre vonatkozó feltétel-vizsgálattal: amelyből tehát a nincs olyan valós szám, amely a feltételeknek egyidejűleg eleget tehet.

17.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Rendezzük át az egyenletet:

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

A megoldás folytatása esetén az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot ki kell egészíteni a bal oldali változót tartalmazó összegzésre vonatkozó feltétel-vizsgálattal: amelyből ez pedig ellentmond a korábban megállapított alaphalmaz feltételnek, tehát nincs megoldás.

18.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Rendezzük át az egyenletet:

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

A megoldás folytatása esetén az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot ki kell egészíteni a bal oldali változót tartalmazó összegzésre vonatkozó feltétel-vizsgálattal: amelyből így azt a következtetést vonjuk le, ha ennek az egyenletnek van megoldása, akkor csak és kizárólag az érték lehet. Az ellenőrzés ezt megerősíti.

19.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Rendezzük át az egyenletet:

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

A megoldás folytatása esetén az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot ki kell egészíteni a bal oldali változót tartalmazó összegzésre vonatkozó feltétel-vizsgálattal: amelyből ez pedig leszűkíti a korábban megállapított alaphalmaz feltétel-vizsgálatot, tehát már csak a tartományon lehetséges az egyenlet megoldása

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

Utóbbi megoldás nem tesz eleget a végleges alaphalmaz feltételnek, az első megoldás ellenőrzéssel

20.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből így tehát vagyis valamint amelyből . A feltételek közös része:

Végezzük el a négyzetre emelést:

A kapott megoldás nem tesz eleget az alaphalmaz feltételnek.

Megjegyzés: a feladat egy másik lehetséges kiírása:

Ekkor átalakítással kell kezdenünk, hogy mindkettő gyökös tag pozitív előjelű legyen, így kapjuk:

21.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből így tehát vagyis valamint amelyből . A feltételek közös része:

Végezzük el a négyzetre emelést:

A kapott megoldás eleget tesz az alaphalmaz feltételnek is és az ellenőrzésnek is.

22.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek leolvasott együtthatóit helyettesítjük a megoldó-képletbe:

Mivel nincs megoldás, ez nem szűkíti le a valós számhalmazt, illetve amelynek leolvasott együtthatóit helyettesítjük a megoldó-képletbe:

Mivel nincs megoldás, ez sem szűkíti le a valós számhalmazt, mint alaphalmaz feltétel-vizsgálatot.

Végezzünk négyzetre emelést:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A kapott megoldásokat az ellenőrzés is megerősíti.

23.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek leolvasott együtthatóit helyettesítjük a megoldó-képletbe:

Ennek gyökei illetve a (negatív előjelű főegyüttható miatt) lefelé nyíló parabola a gyökök között teljesíti a kért relációt, tehát a megoldáshalmaz: illetve amelynek leolvasott együtthatóit helyettesítjük a megoldó-képletbe:

Ennek gyökei illetve a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy nagyobbik gyöktől nagyobb valós számok tartományán teljesíti a kért relációt, így a megoldáshalmaz:

Azt tapasztaljuk, hogy a feltételeknek nincs közös része, így az egyenletnek nincs megoldása.

24.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek leolvasott együtthatóit helyettesítjük a megoldó-képletbe:

Ennek gyökei illetve a (negatív előjelű főegyüttható miatt) lefelé nyíló parabola a gyökök között teljesíti a kért relációt, tehát a megoldáshalmaz: illetve amelynek leolvasott együtthatóit helyettesítjük a megoldó-képletbe:

Ennek gyökei illetve a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy nagyobbik gyöktől nagyobb valós számok tartományán teljesíti a kért relációt, így a megoldáshalmaz:

A feltételek közös része:

Végezzük el a négyzetre emelést:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

Az utóbbi megoldás nem tesz eleget az alaphalmaz feltételnek, az első megoldás eleget tesz és az ellenőrzésnek is.

25.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek gyökei a (negatív előjelű főegyüttható miatt) lefelé nyíló parabola a gyökök közötti valós számtartományon teljesül, tehát

Illetve amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb tartományon teljesíti a kért relációt, tehát .

Azt tapasztaljuk, hogy a feltételeknek nincs közös része, ennek az egyenletnek nincs megoldása.

26.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számtartományon teljesül, tehát

Illetve amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb tartományon teljesíti a kért relációt, tehát .

A feltételek közös része az utóbb kapott megoldáshalmaz:

Rendezzük át az egyenletet

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

Mivel a bal oldal negatív előjelű és a jobb oldal nemnegatív, így ennek az egyenletnek nincs valós megoldása.

27.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számtartományon teljesül, tehát

Illetve amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb tartományon teljesíti a kért relációt, tehát .

A feltételek közös része az utóbb kapott megoldáshalmaz:

Rendezzük át az egyenletet

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

Ennek gyökei amely megoldások eleget tesznek az alaphalmaz feltételnek és az ellenőrzésnek is.

28.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számtartományon teljesül, tehát

Illetve amelynek gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb tartományon teljesíti a kért relációt, tehát .

A feltételek közös része az utóbb kapott megoldáshalmaz:

Rendezzük át az egyenletet

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

A továbbhaladás előtt egészítsük ki az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot a bal oldali változót tartalmazó összegzés vizsgálatával: amelynek gyökei a (negatív előjelű főegyüttható miatt) lefelé nyíló parabola a gyökök között teljesíti a kért relációt, így megoldása: amelyet összevetve a korábban megállapított feltétellel, a módosult alaphalmaz-feltétel:

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a bal oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

Ezek alapján, ha akkor amely megoldások nem tesznek eleget az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnak; valamint ha akkor amely megoldások eleget tesznek az alaphalmaz feltételnek és az ellenőrzésnek is.

IV.Feladat: Oldja meg az egyenleteket és egyenlőtlenségeket!

1.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből ez a feltétel (az értékkészletre vonatkozó feltétel miatt) minden való szám esetén teljesül, valamint amelyből amely pontosítva: így tehát

A feltétel közös része:

Négyzetre emelés, amelynél arra figyelünk, hogy az egyenlet mindkét oldalán kéttagú összeg van, így

Ismételt négyzetre emelés

Az ismételt négyzetre emelés előtt érdemes kiegészíteni az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot: amelyből

amely nem mond ellent és nem módosítja a korábban meghatározott számtartományt.

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve utóbbi kizárható.

2.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

ebből négyzetre-emelés és rendezés után adódik, ami teljes négyzet, tehát minden valós szám esetén teljesül; valamint amelyből ebből négyzetre-emelés és rendezés után

adódik, ami teljes négyzet, tehát minden valós szám esetén teljesül.

Az alaphalmaz feltétel-vizsgálat alapján azt a következtetést vonjuk le, hogy ha a gyökjelek alatt teljes négyzetek vannak, akkor ez abszolútértékes egyenletre vezet.

Ezeket visszahelyettesítve:

Az abszolútértékes kifejezések zérushelyei: ilyenkor a teljes gyökös mennyiség a változó. Ez a két zérushely 3 részre osztja a teljes valós számhalmazt, így esetvizsgálattal haladunk tovább:

1.eset: ha amely pontosítva amelyből a megoldandó egyenlet

Ebből amely megoldás eleget tesz az alaphalmaznak a kezdeti feltételnek és az ellenőrzésnek is.

2.eset: ha amelyből a megoldandó egyenlet

Ez azonosság, tehát az egyenletnek megoldása minden olyan valós szám, amely tartományban van.

3.eset: ha amelyből a megoldandó egyenlet

Ebből amely megoldás eleget tesz az alaphalmaznak a kezdeti feltételnek és az ellenőrzésnek is.

3.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből leolvasva az együtthatókat helyettesítünk a megoldó-képletbe

Tehát ez egy teljes négyzet, így (a pozitív főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola az helyen érinti a vízszintes tengelyt és minden valós szám esetén teljesíti a kért relációt; illetve amelyből leolvasva az együtthatókat helyettesítünk a megoldó-képletbe

Tehát ez egy teljes négyzet, így (a pozitív főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola az helyen érinti a vízszintes tengelyt és minden valós szám esetén teljesíti a kért relációt.

Használjuk ki, hogy a gyökjelek alatt teljes négyzetek vannak, így:

Az abszolútértékes mennyiségek zérushelyei () összesen részre osztják a teljes valós számtartományt, így esetvizsgálat szükséges attól függően, melyik tartományon milyen előjellel hagyható el az abszolútérték-jel.

1.eset: tartományon a megoldandó egyenlet

Ez ellentmondás, nincs megoldás.

2.eset: tartományon a megoldandó egyenlet

A kapott megoldás nem teljesíti kezdeti feltételét.

3.eset: tartományon a megoldandó egyenlet

Ez ellentmondás, nincs megoldás.

Megjegyzés: mivel a megoldandó gyökös egyenlet db abszolútértékes tagot tartalmaz, amelyek zérushelye összesen részre osztják a számegyenest, ezért az egyenletnek legfeljebb megoldása lehetett volna.

4.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből leolvasva az együtthatókat helyettesítünk a megoldó-képletbe

Tehát ez egy teljes négyzet, így (a pozitív főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola az helyen érinti a vízszintes tengelyt és minden valós szám esetén teljesíti a kért relációt; illetve amelyből leolvasva az együtthatókat helyettesítünk a megoldó-képletbe

Tehát ez egy teljes négyzet, így (a pozitív főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola az helyen érinti a vízszintes tengelyt és minden valós szám esetén teljesíti a kért relációt.

Valamint amelyből leolvasva az együtthatókat helyettesítünk a megoldó-képletbe

Tehát ez egy teljes négyzet, így (a pozitív főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola az helyen érinti a vízszintes tengelyt és minden valós szám esetén teljesíti a kért relációt.

Használjuk ki, hogy a gyökjelek alatt teljes négyzetek vannak, így:

Az abszolútértékes mennyiségek zérushelyei () összesen részre osztják a teljes valós számtartományt, így esetvizsgálat szükséges attól függően, melyik tartományon milyen előjellel hagyható el az abszolútérték-jel.

1.eset: tartományon a megoldandó egyenlet

A kapott megoldás nem teljesíti kezdeti feltételét.

2.eset: tartományon a megoldandó egyenlet

A kapott megoldás nem teljesíti kezdeti feltételét.

3.eset: tartományon a megoldandó egyenlet

A kapott megoldás nem teljesíti kezdeti feltételét.

4.eset: tartományon a megoldandó egyenlet

A kapott megoldás nem teljesíti kezdeti feltételét.

Megjegyzés: mivel a megoldandó gyökös egyenlet db abszolútértékes tagot tartalmaz, amelyek zérushelye összesen részre osztják a számegyenest, ezért az egyenletnek legfeljebb megoldása lehetett volna.

5.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

ez a feltétel az számtartomány minden értékére teljesül, hiszen a bal oldal nemnegatív, amely biztosan nagyobb vagy egyenlő, mint ugyanazon szám mínusz 1szerese; valamint amelyből ez a feltétel az számtartomány minden értékére teljesül. (Ez belátható grafikusan megoldással vagy algebrailag, ha négyzetre emelünk majd csökkenő hatvány szerint rendezzük amely egyenlőtlenség bal oldala teljes négyzet, tehát biztosan igaz az egyenlőtlenség.)

Mivel a megoldandó egyenlet bal oldalán két gyökös tag összege van, ezért kétszer kellene négyzetre emelni, amelyek után az egyenlet jobb oldala -ed fokú lesz, tehát elég rosszak az esélyeink, ezért ismét azzal az észrevétellel élünk, hogy a gyökjelek alatt teljes négyzetek vannak, ugyanis: így

Az abszolútértékes kifejezések zérushelyei (ilyenkor a teljes gyökös mennyiségre tekintünk változóra) amelyek összesen részre osztják a teljes valós számtartományt, tehát esetvizsgálat következik:

1.eset: ha amely feltétel sohasem következhet be.

Megjegyzés: egyébként a megoldandó egyenlet ezen a tartományon

2.eset: ha amely csak részben teljesülhet, mégpedig esetén, ekkor

A megoldás a kezdeti feltétel és az ellenőrzés miatt is kizárható.

3.eset: ha amelyből így

Négyzetre emelünk:

Ennek gyökei: illetve utóbbi a kezdeti feltétel miatt és az ellenőrzés miatt is kizárható.

6.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: a gyök és tört értelmezés egyben vizsgálva amelyből

Használjuk ki, hogy ismétlődő mennyiségek fordulnak elő az egyenletben, legyen ekkor

Ennek gyökei: mert teljes négyzet így amelyből négyzetre emelés és kivonás után:

7.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből , valamint és amely egyenlőtlenségeknek ugyanaz a megoldása, mert egymás reciprokai, tehát elég az egyiket megoldani, (legyen az utóbbi) ehhez tudnunk kell a számláló és nevező zérushelyeit, amelyeket már a tört értelmezésnél megkaptunk.

Táblázat:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

A megoldás, mint alaphalmaz

Használjuk ki, hogy a gyökjelek alatt reciprok kifejezések vannak, legyen: ekkor

Ennek gyökei: illetve

1.eset: ha akkor ebből

Amely megoldás megfelelő, az alaphalmazhoz tartozik.

1.eset: ha akkor ebből

Ellentmondás, nincs megoldás.

8.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Rendezzük át az egyenletet:

Szorozzunk a nevezővel

Kiegészítve az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot: amelyből . Tehát, ha ennek az egyenletnek van megoldása, akkor csak és kizárólag lehet, amelyet az ellenőrzés megerősít.

Megjegyzés: ha a feltételeknek csak átfedése lett volna, akkor négyzetre emelés után vezet másodfokú egyenletre, ha pedig a feltételek egymásnak ellentmondanak, akkor nem is szükséges folytatni a megoldást.

9.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amely feltétel minden valós szám esetén teljesül, (hiszen már eleve nemnegatív, ezért tehát ) illetve amelyből

Az utóbbi feltétel esetén tartsuk szem előtt, hogy a bal oldali második szorzótényező legalább értékű (minimumát 6-nál veszi fel) és abban az esetben vehet fel legalább értéket, ha közelítőleg feltétel teljesül; valamint amelyből .

Négyzetre emelés:

Mivel az egyenlet mindegyik tagja tartalmaz „”-es szorzót, egyszerűsítsünk vele:

Ismételt négyzetre emelés:

10.)

Látható, hogy az alaphalmaz feltétel-vizsgálat meglehetősen körülményes, ezért az egyenlet megoldása után mindenképp ellenőrizni kell a megoldást, az első négyzetre emelés után

Ismételt négyzetre emelés után

Ismételt négyzetre emelés után

Ennek gyökei: illetve

Ellenőrzés:

Utóbbi megoldás kizárható

11.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: illetve amelyből valamint amely (mivel a számláló pozitív) akkor teljesülhet, ha amelyből

A feltételek közös része:

Abban az esetben, ha négyzetre emelnénk, akkor a bal oldali tört számlálójában maradna „”-es és „”-es tag is, a nevezőben pedig „”-es tag, tehát rosszak esélyek a megoldásra. A megoldáshoz azt kell észrevennünk, hogy a bal oldali tört nevezője az ugyanazon két tag összegének és különbségének szorzataként szorzattá alakítható, tehát lehetőségünk lesz egyszerűsíteni, illetve használjuk ki, hogy a jobb oldalon külön a számlálóból és külön a nevezőből vonunk gyököt:

Vegyük az egyenlet mindkét oldalának reciprokát:

Négyzetre emelés:

Ha kiegészítsük az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot a jobb oldalra: amelyből akkor azt kapjuk, ha ennek az egyenletnek van megoldása, akkor csak és kizárólag az lehet, amelyet az ellenőrzés megerősít.

12.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amely hiányos másodfokú kifejezés gyökei a (pozitív előjelű főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola a kért relációt a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb számtartományon teljesíti, tehát a megoldáshalmaz:

Vagy azt mondjuk, hogy 4-re hatványozzuk vagy azt, hogy kétszer emelünk négyzetre, azt kapjuk:

Ennek a hiányos másodfokú egyenletnek megoldásai amely megoldások eleget tesznek az alaphalmaz feltételnek is és az ellenőrzésnek.

13.)

A páratlan gyökkitevővel rendelkező gyökre nincs alaphalmaz feltétel-vizsgálat, így közvetlenül harmadikra hatványozhatunk, ekkor:

Mivel az egyenlet jobb oldalán köbös tag van, ezért inkább a szorzattá alakítás módszerét érdemes választani:

A jobb oldali kéttényezős szorzat kizárólag akkor lehet nulla értékű, ha valamely tényező nulla értékű

1.eset: az értéket az ellenőrzés megerősíti.

2.eset: az amelyből ennek gyökei

A kapott megoldásokat az ellenőrzés megerősíti.

14.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből ennek a másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása, tehát minden valós szám esetén teljesül.

Szorozzuk az egyenletet a tört nevezőjével:

Harmadikra hatványozunk:

Ennek gyökei: illetve amely megoldásokat az ellenőrzés megerősíti.

15.)

A páratlan gyökkitevővel rendelkező gyökre nincs alaphalmaz feltétel-vizsgálat, így átrendezzük az egyenletet:

Harmadikra hatványozunk:

Alakítsunk szorzattá:

A bal oldali kéttényezős szorzat kizárólag akkor lehet nulla értékű, ha valamely tényező nulla értékű

1.eset: az értéket az ellenőrzés megerősíti.

2.eset: az amelynek gyökei mert teljes négyzet.

A kapott megoldásokat az ellenőrzés megerősíti.

16.)

Harmadikra hatványozunk:

Ennek gyökei amelyeket az ellenőrzés megerősíti.

17.)

A páratlan gyökkitevővel rendelkező gyökre nincs alaphalmaz feltétel-vizsgálat, így harmadikra hatványozunk:

Alakítsunk szorzattá a bal oldalon:

A bal oldali háromtényezős szorzat kizárólag akkor lehet nulla értékű, ha valamely tényező nulla értékű

1.eset: az amelyből ezt a megoldást az ellenőrzés megerősíti.

2.eset: az amelyből ezt a megoldást az ellenőrzés megerősíti.

3.eset: az amely egyenlet megoldásakor használjuk ki, hogy az eredeti egyenlet bal oldala, tehát ha azt helyettesítjük az eredeti egyenlet jobb oldalával, akkor a megoldandó egyenlet: amelyből ezt a megoldást az ellenőrzés megerősíti.

18.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből

Szorozzuk az egyenletet a nevezővel:

Ez egy mennyiségben másodfokú egyenlet, tehát ennek gyökei: amelyből illetve amelyből . A kapott megoldásokat az ellenőrzés megerősíti.

19.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat:

A bal oldali második tagot átalakítjuk a törtkitevős hatvány felhasználásával (függvénytáblázat 23.oldal) tehát így az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosság miatt a kitevőket összeadjuk:

Ez pedig azt jelenti, hogy ez egy kifejezésben másodfokú egyenlet, ennek gyökei: amelyből

így illetve amelyből így . A kapott megoldásokat az ellenőrzés megerősíti

V.Feladat: Oldja meg az egyenleteket!

1.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

Ezek ellentmondó feltételek, ugyanis nem létezik olyan valós szám, amely legfeljebb értékű, ugyanakkor legalább .

Ennek az egyenletnek nincs megoldása.

2.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Annak ellenére, hogy a feltételeknek van közös része, a feladat megoldását fölösleges folytatni, mert ha a jobb oldali gyökös mennyiségek (értékkészletük miatt) egyenként nemnegatív előjelű helyettesítési értékeket adnak vissza, akkor azok összege is kizárólag nemnegatív előjelű lehet. Nincs megoldás.

3.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a bal oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

Mivel a bal oldali kéttényezős szorzat nemnegatív előjelű és a jobb oldal negatív, így az egyenletnek nincs megoldása.

4.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a bal oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

Ismételten emeljünk négyzetre:

Együtthatók:

Az egyenletnek nincs valós megoldása.

5.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a bal oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

Ismételten emeljünk négyzetre:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

Mindkét gyök eleget tesz az alaphalmaz feltételvizsgálatnak és az ellenőrzés is megerősíti.

6.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből

A feltételek közös része:

Az elkövetkező négyzetre emelésnél vegyük figyelembe, hogy a bal oldalon kéttagú összeg van, tehát az erre vonatkozó nevezetes azonosságot kell alkalmazzuk:

A négyzetre emelés előtt érdemes az alaphalmaz feltételt kiegészíteni, azonban az amelyből feltételt már vizsgáltuk, tehát nem módosul a korábbiakban megállapított alaphalmaz.

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve amely megoldások közül csak az utóbbi tesz eleget az alaphalmaz feltételnek, amelyet az ellenőrzés is megerősít.

7.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: illetve amelyből valamint amelyből

Mivel a feltételeknek nincs közös része, ezért a feladatnak nincs megoldása.

8.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből valamint amelyből

A feltételek közös része:

Mivel mindegyik gyökös tag pozitív előjelű, ezért négyzetre emelhetünk, arra kell figyelnünk, hogy a bal oldalon két tagú összeg van, ezért ezt a rá vonatkozó nevezetes azonosság alapján tesszük meg.

Mivel a kapott egyenlet bal oldalán a gyökös tagok mindegyike a megállapított alaphalmaz feltételhez tartozó valós számok esetén egyenként nemnegatív előjelűek, tehát a szorzatuk is nemnegatív amely nem lehet egyenlő egyenlő egy negatív értékkel, így ennek az egyenletnek nincs megoldása.

9.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből valamint amelyből

A feltételek közös része:

Mivel mindegyik gyökös tag pozitív előjelű, ezért négyzetre emelhetünk, arra kell figyelnünk, hogy a bal oldalon két tagú összeg van, ezért ezt a rá vonatkozó nevezetes azonosság alapján tesszük meg.

Mivel az első négyzetre emelés után (a vegyes szorzatban) maradt gyökös mennyiség, ezért ismételten négyzetre emelünk:

A bal oldali kéttényezős szorzat kizárólag akkor lehet nulla értékű, ha valamely tényező nulla értékű, így az

amelyből érték kizárható és csak az amelyből tesz eleget az alaphalmaz feltételnek, amely értéket az ellenőrzés megerősíti.

10.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből valamint amelyből

A feltételek közös része:

Mivel mindegyik gyökös tag pozitív előjelű, ezért négyzetre emelhetünk, arra kell figyelnünk, hogy a bal oldalon két tagú összeg van, ezért ezt a rá vonatkozó nevezetes azonosság alapján tesszük meg.

Mivel az első négyzetre emelés után (a vegyes szorzatban) maradt gyökös mennyiség, ezért ismételten négyzetre emelünk:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve amely megoldások közül az utóbbi kizárható.

Az értéket az ellenőrzés megerősíti.

11.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből valamint amelyből

A feltételek közös része:

Mivel mindegyik gyökös tag pozitív előjelű, ezért négyzetre emelhetünk, arra kell figyelnünk, hogy a bal oldalon két tagú összeg van, ezért ezt a rá vonatkozó nevezetes azonosság alapján tesszük meg.

Mivel az első négyzetre emelés után (a vegyes szorzatban) maradt gyökös mennyiség, ezért ismételten négyzetre emelünk, azonban előtte a jobb oldali változót tartalmazó összegzés nemnegatív feltétel-vizsgálatával érdemes kiegészíteni az alaphalmaz vizsgálatot: amelyből

Ennek a feltételnek a korábbiakban megállapított alaphalmaz feltétellel nincs közös része, tehát ennek az egyenletnek nincs megoldása.

12.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: illetve amelyből valamint amelyből

A feltételek közös része:

Mivel mindegyik gyökös tag pozitív előjelű, ezért négyzetre emelhetünk, arra kell figyelnünk, hogy a bal oldalon két tagú összeg van, ezért ezt a rá vonatkozó nevezetes azonosság alapján tesszük meg.

Mivel az első négyzetre emelés után (a vegyes szorzatban) maradt gyökös mennyiség, ezért ismételten négyzetre emelünk, azonban előtte a jobb oldali változót tartalmazó összegzés nemnegatív feltétel-vizsgálatával érdemes kiegészíteni az alaphalmaz vizsgálatot: amelyből

A kapott feltételnek a korábbiakban megállapított alaphalmazzal kizárólag egyetlen érték, az tesz eleget egyidejűleg, tehát ha ennek az egyenletnek van megoldása, akkor kizárólag lehet. Ezt az ellenőrzés megerősíti.

13.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből valamint amelyből

A feltételek közös része:

Mivel mindegyik gyökös tag pozitív előjelű, ezért négyzetre emelhetünk, arra kell figyelnünk, hogy a bal oldalon két tagú összeg van, ezért ezt a rá vonatkozó nevezetes azonosság alapján tesszük meg.

Mivel az első négyzetre emelés után (a vegyes szorzatban) maradt gyökös mennyiség, ezért ismételten négyzetre emelünk, azonban előtte a jobb oldali változót tartalmazó összegzés nemnegatív feltétel-vizsgálatával érdemes kiegészíteni az alaphalmaz vizsgálatot: amelyből

A kapott megoldás ellentmond az alaphalmaz feltételnek.

14.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből valamint amelyből

A feltételek közös része:

Mivel mindegyik gyökös tag pozitív előjelű, ezért négyzetre emelhetünk, arra kell figyelnünk, hogy a bal oldalon két tagú összeg van, ezért ezt a rá vonatkozó nevezetes azonosság alapján tesszük meg.

Mivel az első négyzetre emelés után (a vegyes szorzatban) maradt gyökös mennyiség, ezért ismételten négyzetre emelünk, azonban előtte a jobb oldali változót tartalmazó összegzés nemnegatív feltétel-vizsgálatával érdemes kiegészíteni az alaphalmaz vizsgálatot: amelyből

A kapott megoldás eleget tesz az alaphalmaz feltételnek is és az ellenőrzésnek is.

15.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből valamint amelyből

A feltételek közös része:

Mivel mindegyik gyökös tag pozitív előjelű, ezért négyzetre emelhetünk, arra kell figyelnünk, hogy a bal oldalon két tagú összeg van, ezért ezt a rá vonatkozó nevezetes azonosság alapján tesszük meg.

Mivel az első négyzetre emelés után (a vegyes szorzatban) maradt gyökös mennyiség, ezért ismételten négyzetre emelünk, azonban előtte a jobb oldali változót tartalmazó összegzés nemnegatív feltétel-vizsgálatával érdemes kiegészíteni az alaphalmaz vizsgálatot: amelyből

Az előzőekben megállapított alaphalmaz feltétellel közös rész lesz:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve amely megoldások közül csak az utóbbi tesz eleget az alaphalmaznak. Az ellenőrzés a lehetséges megoldást megerősíti.

Megjegyzés: előfordulhatott volna, hogy olyan másodfokú egyenletre vezet, amelynek nincs megoldása.

16.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből amely esetén hivatkozhatunk arra, hogy feltétel esetén kizárólag nemnegatív előjelű értékek a helyettesítési értékek, tehát ez a feltétel teljesül.

Emeljünk négyzetre:

Ez pedig ellentmondás, mert a bal oldal nemnegatív, akkor az nem lehet egyenlő egy negatív értékkel.

17.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből amely esetén hivatkozhatunk arra, hogy feltétel esetén kizárólag nemnegatív előjelű értékek a helyettesítési értékek, tehát ez a feltétel teljesül.

Emeljünk négyzetre:

Ismételt négyzetre emelés:

A kapott megoldás eleget tesz az alaphalmaz feltételnek is és az ellenőrzés is megerősíti.

18.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből amely esetén hivatkozhatunk arra, hogy feltétel esetén kizárólag nemnegatív előjelű értékek a helyettesítési értékek, tehát ez nem lehet egyenlő egy nemnegtatív érték mínusz szeresével, így a feltétel teljesül.

Emeljünk négyzetre:

Rendezzük át az egyenletet:

Mivel az első négyzetre emelés után (a vegyes szorzatban) maradt gyökös mennyiség, ezért ismételten négyzetre emelünk, azonban előtte a jobb oldali változót tartalmazó összegzés nemnegatív feltétel-vizsgálatával érdemes kiegészíteni az alaphalmaz vizsgálatot: amelyből

Az előzőleg megállapított alaphalmaz feltétel-vizsgálatot figyelembe véve, kizárólag egyetlen érték, az tesz eleget, tehát ha ennek az egyenletnek van megoldása, akkor az lehet. Ezt az értéket az ellenőrzés megerősíti.

19.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve amelyből amely esetén hivatkozhatunk arra, hogy feltétel esetén kizárólag nemnegatív előjelű értékek a helyettesítési értékek, tehát ez nem lehet egyenlő egy nemnegtatív érték mínusz szeresével, így a feltétel teljesül.

Emeljünk négyzetre:

Rendezzük át az egyenletet:

Mivel az első négyzetre emelés után (a vegyes szorzatban) maradt gyökös mennyiség, ezért ismételten négyzetre emelünk, azonban előtte a jobb oldali változót tartalmazó összegzés nemnegatív feltétel-vizsgálatával érdemes kiegészíteni az alaphalmaz vizsgálatot: amelyből

Az előzőleg megállapított alaphalmaz feltétel-vizsgálatot figyelembe véve új feltétel adódik:

Ismételt négyzetre emelés:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve amely megoldások közül csak az utóbbi tesz eleget az alaphalmaz feltételnek és ezt az ellenőrzés is megerősíti.

Megjegyzés: természetesen az is előfordulhatott volna, hogy olyan másodfokú egyenletre vezet, amelynek mindkettő megoldása kizárható vagy olyan, amelynek mindkettő megoldása megfelelő.

20.)

Rendezzük át az egyenletet:

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből leolvasva az együtthatókat helyettesítünk a megoldó-képletbe

Tehát ez egy teljes négyzet, így (a pozitív főegyüttható miatt) felfelé nyíló parabola az helyen érinti a vízszintes tengelyt és minden valós szám esetén teljesíti a kért relációt; illetve amelyből leolvasva az együtthatókat helyettesítünk a megoldó-képletbe

Ennek gyökei: illetve

A (negatív előjelű főegyüttható miatt) lefelé nyíló parabola a gyökök között teljesíti a kért relációt, tehát a megoldáshalmaz: amely a feltételek közös része is.

A feladat megoldása innen kétféleképp is folytatható.

1.lehetséges megoldás: felhasználjuk, hogy a gyökjel alatt teljes négyzet van, ekkor

Az abszolútérték miatt esetvizsgálat szükséges.

1/a.eset: ha amelyből akkor az abszolútérték-jel elhagyható, így

Együtthatókat

Ennek gyökei: illetve

A két megoldás közül csak az utóbbi tesz eleget a kezdeti feltételnek és az alaphalmaz feltételnek.

1/b.eset: ha amelyből akkor az abszolútérték-jelet egy -es szorzóval hagyható el, így

Együtthatókat

Ennek gyökei: illetve

A két megoldás közül csak az első tesz eleget a kezdeti feltételnek és az alaphalmaz feltételnek.

2.lehetséges megoldás: Ha a rendezés után kapott egyenletet szeretnénk négyzetre emelni, akkor a jobb oldalon egy tagú összegzésnek kellene vennünk négyzetét. A probléma ott kezdődik, hogy így egy -ed fokú polinomot kapunk, amely nem teljes négyzet (mert marad benne -ad fokú tag), így rosszak az esélyek a megoldás meghatározásához. Vegyük észre, hogy az eredetileg kitűzött egyenlet bal oldalán lévő első két tag majdnem ugyanaz, mint ami a gyökjel alatt van, ezért ha azt kiegészítjük, hogy tényleg megegyezzenek, akkor egy segédváltozó bevezetésével egyszerűbb alakra hozható az egyenlet:

Legyen amelyből ekkor a helyettesítés után

Együtthatókat

Ennek gyökei: illetve

A két lehetséges érték közül az első kizárható a négyzetgyök értékkészlete miatt, így:

Együtthatókat

Ennek gyökei: illetve

A kapott megoldások eleget tesznek az alaphalmaz feltételnek is és az ellenőrzésnek is.

21.)

Rendezzük át az egyenletet:

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből leolvasva az együtthatókat helyettesítünk a megoldó-képletbe

Nincs valós gyök, tehát minden valós szám esetén teljesíti a kért relációt;

illetve amelyből leolvasva az együtthatókat helyettesítünk a megoldó-képletbe

Ennek gyökei: illetve

A (negatív előjelű főegyüttható miatt) lefelé nyíló parabola a gyökök között teljesíti a kért relációt, tehát a megoldáshalmaz: amely a feltételek közös része is.

A lehetséges megoldási módszerek közül látható, hogy talán egyszerűbb a segédváltozóval történő megoldás, ehhez egészítsük ki az eredeti egyenletet:

Legyen , amelyből ekkor a helyettesítés után

Együtthatókat

Ennek gyökei: 0797289 illetve

A két lehetséges érték közül az első kizárható a négyzetgyök értékkészlete miatt, így:

Együtthatókat

Ennek gyökei: illetve

A kapott megoldások eleget tesznek az alaphalmaz feltételnek is és az ellenőrzésnek is.

22.)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből illetve (figyelembe véve a nem nulla értékű tört értelmezést)

amelyből valamint amelyből továbbá (figyelembe véve a nem nulla értékű tört értelmezést) amelyből

A feltételek közös része:

Szorozzuk az egyenletet a nevezők legkisebb közös többszörösével. Mivel tört=tört alakú egyenlet, ezért keresztbeszorzás történik:

Emeljünk négyzetre:

A kapott megoldás eleget tesz az alaphalmaz feltételnek is és az ellenőrzésnek is.